2.1 概念、2.2 运算

四板块

一、概念
二、逆
三、初等变换
四、分块

+ C-B公式

red: 注
green: 记
brown: 证明
blue: 思维

: 定义
: 定理

Def1 矩阵　esp　$m=n$，方阵

主对角线
对角阵，$diag\{a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}\}$
单位阵，E_n or I_n
上(下三角)阵

Def2 相等　①同型　②元素相等

Def3 矩阵行/列向量　推广　$1\times n:(a_1,\cdots,a_n)$ n维行向量

$n\times1:\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}$ n维列向量

映射(函数)　$M_n(R)\longrightarrow R$

$A\longrightarrow|A|$

行列式的性质

设A,B为n阶方阵，c为常数.
① $|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$（一般而言）加法
② $|cA|=c^n|A|$ 数乘
③ $|AB|=|A||B|$ 乘法
④ $|A^T|=|A|$ 转置
⑤ $|\bar{A}|=\overline{|A|}$ 共轭
⑥ 若A可逆，则 $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ 取"逆"
⑦ $|A^*|=|A|^{n-1}$ $(n\geq2)$ 结合star

运算

$+$
① 交换律
② 结合律
③ 零元存在性
④ 负元存在性
(⑤) $A-B=A+(-B)$
负元

$\cdot$
① 数乘结合律
② 矩阵分配律
③ 数乘分配律
④ 数乘单位元　$1\cdot A=A$
(⑤) 数乘零元　$0\cdot A_{m\times n}=0_{m\times n}$

AB　A列 = B行

$A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}=AB_{m\times n}$

① 结合律　pf: Σ号的移动
② 分配律
③ 数乘(相容性)
④ 单位元　$(AE=EA=A)$
注 不满足交换律、消去律、整性
$A\neq0$且$B\neq0\Rightarrow AB\neq0$

esp
$$\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_1&&\\&m_2&\\&&m_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1a_{11}m_1&\lambda_1a_{12}m_2&\lambda_1a_{13}m_3\\\lambda_2a_{21}m_1&\lambda_2a_{22}m_2&\lambda_2a_{23}m_3\\\lambda_3a_{31}&\lambda_3a_{32}m_2&\lambda_3a_{33}m_3\end{pmatrix}$$

左乘效果：分别对每行乘
右乘效果：分别对每列乘

Def4 乘方　设A为方阵，$A\cdot A=A^2$.

性质
① $A^rA^s=A^{r+s}$　$(r,s\in Z^+)$
② $(A^r)^s=A^{rs}$

注
① $(AB)^r\neq A^rB^r$　$AB\cdot A\cdot B\cdots$　$A\cdot A\cdots B\cdot B\cdots$
② 若 $AB=BA$，则 $(AB)^r=A^rB^r$，进而有 $(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\cdots+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n$

纯量阵 $c\cdot E_n$
$(cE_n+A)^n=\cdots$ ✓

Def5 转置

- $A=A^T$，A 对称阵
- $A=-A^T$，A 反对称阵

性质
① $(A^T)^T=A$
② $(A+B)^T=A^T+B^T$
③ $(cA)^T=cA^T$
④ $(AB)^T=B^TA^T$　pf ①同型 ②元素

Def 6 共轭 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 复矩阵，共轭 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$

性质
① $\overline{\overline{A}}=A$
② $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$
③ $\overline{c\cdot A}=\overline{c}\,\overline{A}$
④ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\,\overline{B}$
⑤ $(\overline{A})^T=\overline{A^T}$

2.3 逆

为解方程组，令 $Ax=B$
想同除A，引入"除法" $\Rightarrow$ 引入"逆"

Pro +
① $A^*A=AA^*=|A|E$，$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$
② $|AB|=|A||B|$
③ $A^{-1}\exists \Leftrightarrow |A|\neq 0$.

Def 1 逆阵 A: n阶方阵. if $\exists B_{n\times n}$. st $AB=BA=E_n$
则称B为A的逆阵，$B=A^{-1}$

注 ① 仅方阵有逆阵
② 非零方阵不一定有逆阵
不是 $|A|\neq 0$

性质 ① 若 $A^{-1}\exists$，必唯一 唯一
② $(A^{-1})^{-1}=A$ 自身
③ 若A、B可逆，则AB可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ pf: $(AB)(B^{-1}A^{-1})=\cdots=E$
$(B^{-1}A^{-1})(AB)=\cdots=E$ #

推广 $A_1\cdots A_m$ 的逆：$A_m^{-1}\cdots A_1^{-1}$ 乘法
④ $(cA)^{-1}=c^{-1}A^{-1}$ pf: 相容性. 左乘右乘得E. 数乘（与转置性质区分!）
⑤ 若A可逆，则 A^T 可逆，且 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 结合转置
⑥ 对可逆阵，消去律成立 作同乘逆可消 ! 成立
整性成立
⑦ (见书末) $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ 取出逆
⑧ (补) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$ 结合* pf: 由 $A^*A=|A|E$，$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$　由 $(A^{-1})^*A^{-1}=|A^{-1}|E$，$(A^{-1})^*=|A^{-1}|A=\frac{A}{|A|}$

How 求 A^{-1}?
引入 A^*

Def 2 伴随矩阵
$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ A_{n1} & \cdots & & A_{nn} \end{bmatrix}^T_{n\times n}$$
勿漏T，勿忘代数余子式符号

$$\begin{bmatrix} |A| & & \\ & |A| & \\ & & \ddots \ |A| \end{bmatrix}_{n\times n}$$

引理 $A_{n\times n}$，有 $A^*A=A^*A=|A|E_n$

定理 $A=A_{n\times n}$，若 $|A|\neq 0$，则A可逆，且 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$ $\xrightarrow{cor}$ ① $A^*=A^{-1}|A|$
② $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$ (由引理导出)

Apply $AX=B$，$X=A^{-1}B$，$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=\underset{n\times 1}{X}=\frac{1}{|A|}\overset{j行1列}{\underset{n\times n}{A^*}\underset{n\times 1}{B}}$
具体地，$x_j=\frac{1}{|A|}(A_{1j}b_{11}+A_{2j}b_{21}+\cdots+A_{nj}b_{n1})$
$=\frac{|A_j|}{|A|}$

$$\begin{vmatrix} \cdots & b_{11} & \cdots \\ \cdots & b_{21} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{n1} & \cdots \end{vmatrix}$$
jth

即与 Cramer 法则相符

定理2 $|AB|=|A||B|$ 乘积的行列式等于行列式的乘积

Pf 构造 $C=\begin{bmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & & & \\ -1 & & & & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ & -1 & & & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ & & \ddots & & \vdots & & & \vdots \\ & & & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

用来消列

…

$\Rightarrow \begin{vmatrix} O & AB \\ -E_n & B \end{vmatrix}$，拉普拉斯

Apply

① $A=\begin{bmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \cdots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \cdots & (a_1+b_n)^n \\ \vdots & \vdots & & \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \cdots & (a_n+b_n)^n \end{bmatrix}$，求 $|A|$.

用二项式th 拆成两个矩阵的乘积，再用th $(a_0+b_0)^n=\sum_{i=0}^{n} C_n^i a_0^i \, b_0^{n-i}$

$A=\begin{bmatrix} 1 & C_n^1 a_0 & C_n^2 a_0^2 & \cdots & C_n^n a_0^n \\ 1 & C_n^1 a_1 & C_n^2 a_1^2 & \cdots & C_n^n a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & C_n^1 a_n & C_n^2 a_n^2 & \cdots & C_n^n a_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0^n & b_1^n & \cdots & b_n^n \\ b_0^{n-1} & b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

范!

② $A=\begin{bmatrix} x & y & -z & w \\ y & -x & -w & -z \\ z & -w & x & y \\ w & z & y & -x \end{bmatrix}$，$|AA^T|=|A|^2=u^4$，$u=x^2+y^2+z^2+w^2$ …

找另一矩阵作乘积

√(定理1)

定理3 若 $A=A_{n\times n}$，则 A 可逆 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

Pf 利用定理2易证 反证法

推论

① 设 $A_1,\cdots,A_m$ 为 n 阶方阵，若 $\exists i$ st $|A_i|=0$，则 $A_1\cdots A_m$ 为奇异阵

② $|A^{-1}|=|A|^{-1}$ "取"出逆

Pf $AA^{-1}=E$，$|A||A^{-1}|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=|A|^{-1}$

③ 设 $A=A_{n\times n}$，若 $AB=E_n$ 或 $BA=E_n$，$B=A^{-1}$. 逆存在的条件减弱（定义减弱）

Pf 法1 1° 由 $|AB|=|E|$，
$|A||B|=1$.
若A不可逆，则 $|A|=0$，$0\cdot|B|=1$
矛盾.
故A可逆
2° 证 A^{-1} 只能是B
$B=E_nB=A^{-1}AB=A^{-1}$ #

法2 由 $AB=E$，
$A^*AB=A^*$，
$|A|B=A^*$，
$B=\frac{A^*}{|A|}$，
即 $B=A^{-1}$

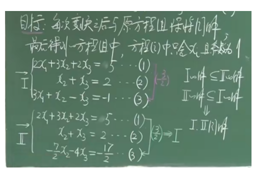
A^* 为A"伴随"!

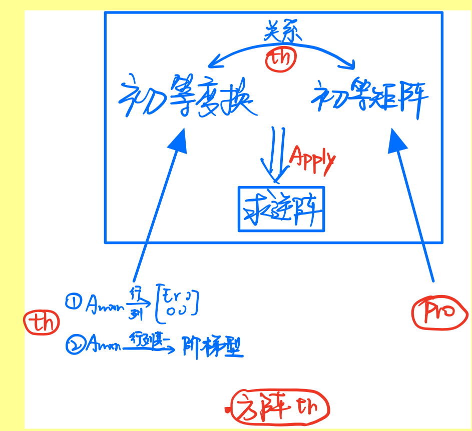
2.4 矩阵的初等变换与初等矩阵

2.5 初等变换求逆阵

引入 Cramer 法则不能解的方程：
① 行列式过大
② $D=0$
③ 个数不同.

· 证两个方程同解：Ⅰ解 ⊆ Ⅱ解，
Ⅱ解 ⊆ Ⅰ解.
· 找逆变换





Def1 矩阵的初等变换

1° 对换某2行/列

2° 某行/列乘非零常数

3° 某行/列乘常数，加到另1行/列上

Q

$\tilde{A} \xrightarrow{?} (E_n \vdots \beta)$

i.e.

$A \xrightarrow{?} E_n$

Def2 相抵 若A通过若干次初等变换可变为B，则称A相抵于B. 记为 $A\sim B$

定理1 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 A 必相抵于 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$

Pf 归纳法

1° 不为 0 元素移到左上角，化为 1，消列，消行，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{bmatrix}_{m\times n}$

2° 重复以上步骤

注 $0\le r\le \min\{m,n\}$，r 由 A 唯一确定

Q 只用行变换，不用列变换可否变为 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$？ eg $(1,2,3)\xrightarrow{\times}(1,0,0)$
那为什么最简单的形式？

Def3 阶梯形矩阵

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，对 $\forall\, 1\le i\le m$

$$k_i=\begin{cases} +\infty, & a_{ij}=0,\ \forall\, 1\le j\le n \\ \min\{j \mid a_{ij}\ne 0\}, & \exists\, a_{ij}\ne 0 \end{cases}$$

（若 A 的第 i 行不全为 0，则 a_{ik_i} 是第 i 行从左至右第一个非零元素）称为第 i 行的阶梯点、

A 为阶梯形矩阵 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, 0\le r\le m$. st $k_1<k_2<\cdots<k_r$，$k_{r+1}=\cdots=k_m=+\infty$

定理2 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则通过初等行变换可将 A 化为阶梯形矩阵

Pf 对列数 n 进行归纳
第二数归

Def4 初等矩阵 对 E_n 实施三类行变换后得到的矩阵称为三类初等阵

(I) $P_{ij}=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

(II) $P_i(c)=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

(III) $T_{ij}(c)=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & c & \cdots & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ i\text{th} \\ \\ j\text{th} \\ \\ \\ \end{array}$

定理3 初等行(列)变换等价于左(右)乘对应初等阵 行左列右

两者关系

i.e. $\overset{i}{\underset{j}{\leftrightarrows}}A=P_{ij}A$；$\overset{c}{\to} {}^{i}A=P_i(c)A$；$c\overset{i}{\underset{j}{\hookleftarrow}}A=T_{ij}(c)A$

$\overset{i\,j}{A}=AP_{ij}$；$\overset{\downarrow c}{\overset{j}{A}}=AP_{i}(c)$；$\overset{c}{\overset{i\,j}{A}}=AT_{ij}(c)$

cor 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则存在 m 阶非异阵 P，n 阶非异阵 Q，st $PAQ=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$PAQ=\underbrace{P_1\cdots P_s}_{\text{行变换}} A \underbrace{Q_1\cdots Q_t}_{\text{列变换}}$，必可变为 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ （由结合律，可一下行，一下列..）

引理 初等阵的性质 ① 初等阵都可逆，且逆阵为同类初等阵 逆

$P_{ij}^{-1}=P_{ij}$ ，$P_i(c)^{-1}=P_i(\frac{1}{c})$ ，$T_{ij}(c)^{-1}=T_{ij}(-c)$

② $|P_{ij}|=-1$ ，$|P_i(c)|=c$ ，$|T_{ij}(c)|=1$ 画行列式

③ 非异阵经初变仍为非异阵；奇异阵仍为奇异阵

$A=P_s\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t$

Def5 等价关系 ① 自反性 $a\sim a$
② 对称性 $a\sim b\Rightarrow b\sim a$
③ 传递性 $a\sim b, b\sim c \Rightarrow a\sim c$

定理4 矩阵相抵关系是等价关系

～ 相抵 相似 合同

Pf
① $A=E_nA\Rightarrow A\sim A$
② 由 $A\sim B$，$\exists P, Q$ st $P_r\cdots P_1AQ_1\cdots Q_t=B$.
$\Rightarrow A=P_1^{-1}\cdots P_r^{-1}BQ_t^{-1}\cdots Q_1^{-1}$，i.e. $A\sim B\Rightarrow B\sim A$
③ $B=P_r\cdots P_1AQ_1\cdots Q_s$
$C=R_k\cdots R_1BT_1\cdots T_l$，代入.
$C=\cdots A\cdots$ i.e. $A\sim B, B\sim C\Rightarrow A\sim C$ #

定理5 设 $A=A_{n\times n}$，则下列结论等价

① A 为非异阵
② $A\xrightarrow{\checkmark} E_n$ (E_r，$r=n$) （③更强，②作引理）
③ A 仅通过初等行变换或初等列变换即可变为 E_n
④ $A\overset{\exists}{=}P_1\cdots P_s$
(⑤) $A^{-1}\exists$
(⑥) A 满秩
(⑦) $Ax=0$ 仅零解

Pf 只证 ② ⇒ ③

设 $A\sim E_n$

则有 $\boxed{P_r\cdots P_1A}\boxed{Q_1\cdots Q_s}=E_n$
$\quad\quad * \quad\quad\quad **$

$\boxed{\text{有 } *^{-1}=**}$

故 $Q_1\cdots Q_sP_r\cdots P_1A=E_n$，
即全为行变换

方法 求逆阵方法 构造 $(A\,\vdots\,E_n)$，对其只施行变换，当 $A\to E_n$ 时，则右边 $E_n\to A^{-1}$

列则 $\begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix}$

（算出来后可用 $AA^{-1}\overset{?}{=}E_n$ 来检验）

Pf $(A\,\vdots\,E_n)\to(P_1A\,\vdots\,P_1E_n)$

$\to(P_s\cdots P_1A\,\vdots\,P_s\cdots P_1E_n)$

而由 $P_s\cdots P_1A=E_n$，
$\Rightarrow P_s\cdots P_1E_n=A^{-1}$，
即 $(E_n\,\vdots\,A^{-1})$

求矩阵方程 $AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$，

作 $(A \vdots B)$，将 $A \to E_n$，则 $B \to A^{-1}B$ 类似易证

注 $XA=B$ 时要作 $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$（实质为对 B 作右乘）

2.6 分块矩阵

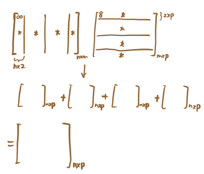
Def 1 分块 先用横虚线将矩阵分成 r 块，再用竖虚线将其分为 s 块，得到 rs 块矩阵，记为

$$A=\left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{array}\right]=(A_{ij})_{r\times s}$$

Def 2 相等 分块相同，$A_{ij}=B_{ij}$

Def 3 运算

- 加减 分块相同
- 数乘
- 乘法 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，$B=(B_{ij})_{s\times k}$
  且 A 的列分块方式与 B 的行分块方式一样（类同矩阵乘法，第一个的列 = 第二个的行）
  定义 $C=AB=(C_{ij})_{r\times k}$，其中
  $$C_{ij}=\overset{m_i\times n_1}{A_{i1}}\overset{n_1\times\_}{B_{1j}}+\overset{m_i\times n_2}{A_{i2}}\overset{n_2\times\_}{B_{2j}}+\cdots+\overset{m_i\times n_s}{A_{is}}\overset{n_s\times\_}{B_{sj}}$$
  思考证明：分块矩阵的乘积与看成普通矩阵乘积一致 (easy)



Def 4 转置 $A=(A_{ij})_{r\times s}$，则 A^T 为 $s\times r$

$$A^T=\begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{r1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{r2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1s}^T & A_{2s}^T & \cdots & A_{rs}^T \end{bmatrix}$$ 整体转+块转

Def 5 共轭 对每个块中每个元素取共轭

Def 6 行分块 / 列分块

$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times p}$

$A=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$

$B=(\beta_1 \cdots \beta_p)$

$\Rightarrow \underset{\text{“}m\times 1\text{”}\ \text{“}k1\text{”}}{AB}=\begin{pmatrix} \boxed{\alpha_1} \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}\boxed{B}=\begin{pmatrix} \alpha_1 B \\ \vdots \\ \alpha_m B \end{pmatrix} \Rightarrow AB$ 的行分块

看成一块

由分块乘法定义得

$AB = \overset{n}{A}(\beta_1, \cdots, \beta_p) = (A\beta_1, \cdots, A\beta_p) \Rightarrow$ AB的列分块

Def 7 设 $A=(A_{ij})_{r\times s}$ 为分块阵，以下称为 三类分块初等变换

1° 对换 2个分块行(列)

2° 非异阵左乘A的某一分块行；右乘A的某一分块列

非异阵 → 一堆初变 → 一堆行/列变换，对一个分块行/列效果相同

3° 将一个矩阵M左乘某一分块行，加到另一分块行上；右，列
(奇异也可，但无意义)

• 分块单位阵 $I = \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & \\ & I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$

(I) $P_{ij} = \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & I_{m_i} & & \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ & & I_{m_j} & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$

(II) $P_i(M) = \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & M & \\ & & & \ddots \\ & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$
$(|M|\neq 0)$

(III) $T_{ij}(M) = \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & \\ & I_{m_i} & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & M & \cdots & I_{m_j} & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & I_{m_k} \end{bmatrix}$
$(|M|\neq 0)$

定理1 表同前面！

① 可逆，且逆为同类阵

$P_{ij}^{-1} = P_{ij}^{T}$,

$P_i(M)^{-1} = P_i(M^{-1})$

$T_{ij}(M)^{-1} = T_{ij}(-M)$

② $|P_{ij}| = (-1)^{l}$，$l = \cdots$ (自推)

$|P_i(M)| = |M|$

$|T_{ij}(M)| = 1$

③ 分块初等行变换等价于左乘对应分块初等阵 (列，右)

注 $\overset{i \leftrightarrow j}{A} = A P_{ij}$ ①　　$\overset{i \xleftarrow{M} j}{A} = T_{ji}(M)$

④ 第三类初等行变换不改变行列式的值　Pf $\left|\overset{i \xleftarrow{M} j}{A}\right| = |T_{ij}(M)A| = |T_{ij}(M)|\,|A| = |A|$

定理2 设 $M = \begin{bmatrix} A_m & B \\ C & D_n \end{bmatrix}$　• 拉普拉斯⇒上/下三角分块，$|A| = |A_1||A_2|\cdots|A_r|$　构造 上/下三角分块，用拉th & th1④

i) 若 $|A|\neq 0$: $|M| = |A|\cdot|D-CA^{-1}B|$　Pf $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - CA^{-1}\times r_1} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$，由th1④，$|M| = |A|\,|D-CA^{-1}B|$
(左乘!)

ii) 若 $|D|\neq 0$: $|M| = |D|\cdot|A-BD^{-1}C|$

iii) 若 $|A|\neq 0, |D|\neq 0$: $|A|\,|D-CA^{-1}B| = |D|\,|A-BD^{-1}C|$
矩阵的降阶公式 (if A高阶，D低阶，则方便)

eg $M = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2+1 & \cdots & a_1a_n+1 \\ a_2a_1+1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_na_1+1 & a_na_2+1 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix} \overset{?}{=} D-CA^{-1}B$

思路: $M = -I_n + (a_{ij}+1)_{n\times n}$　让M为 $D-CA^{-1}B$ 大块，ABCD小块

$= -I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$= \overset{D}{-I_n} - \overset{C}{\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}} \overset{A}{(-I_n)^{-1}} \overset{B}{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}$$

构造 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，其中 $D=-I_n$，$A=-I_2$

$C=B^T=\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$

$|-I_2||M|$

$$= |-I_n| \cdot \left| -I_2 - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} (-I_n)^{-1} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$= \cdots$

方法 求逆 类同非分块 $\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & E & 0 \\ C & D & 0 & E \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} E & & \\ & E & \cdots \end{array}\right)$

2.7 Cauchy-Binet公式

对于 $A_{n\times n}$，$B_{n\times n}$，可有 $|AB|=|A||B|$.

Q：对于 $A_{m\times n}$，$B_{n\times m}$ 矩阵，求 $|AB|$

定理1（Cauchy-Binet公式）设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{n\times m}$

① 若 $m>n$，则 $|AB|=0$

② 若 $m\le n$，则 $|AB| = \sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \cdot B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$

m阶子式（取行列式，是个数）

Pf 构造m+n阶方阵：

$$\begin{bmatrix} A_{m\times n} & O_{m\times m} \\ -I_{n\,(n\times n)} & B_{n\times m} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} O & AB_{m\times m} \\ -I_n & B_{n\times m} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & AB \\ -I_n & B \end{vmatrix}$$

对前m行进行Laplace展开：

右边行列式 $= |AB| \cdot (-1)^{(1+2+\cdots+m)+[(n+1)+\cdots+(n+m)]} \cdot |-I_n|$

$= |AB| \cdot (-1)^{n(m+1)}$

下计算左边行列式：<1> 若 $m>n$，

则包含在前m行的任一m阶子式至少有一列为0，从而值为0.

由Laplace th，

左边行列式 $=0$，于是 $|AB|=0$

<2> 若 $m\le n$，

则由Laplace th，左边行列式 $= \sum\limits_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n} A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \cdot C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix}$ 代数余子式

$\begin{pmatrix} A & O \\ -I_n & B \end{pmatrix}$

代数余子式 $C\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} = (-1)^{1+2+\cdots+m+j_1+j_2+\cdots+j_m} \underbrace{|(-e_{i_1}, -e_{i_2}, \cdots, -e_{i_{n-m}}, B)|}_{\text{记为}|N|}$（其中 $1\le i_1<i_2<\cdots<i_{n-m}\le n$ 是 $1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le n$ 的余指标，$e_i=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$）

下计算 $|N|$：对前 $n-m$ 列用Laplace展开：

$|N| = |-I_{n-m}| \cdot (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_{n-m}+1+2+\cdots+(n-m)} \cdot B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$ → i的余补

代入，有

左边行列式 $= \sum\limits_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n} (-1)^l \cdot A\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_m \end{pmatrix} \cdot B\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m \\ 1 & 2 & \cdots & m \end{pmatrix}$

最后只需证：l 与 $n(m+1)$ 有相同奇偶性，或证 $l+n(m+1)$ 为偶数（易证）#

定理2 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$b=(b_{ij})_{n\times m}$，$1\le r\le m$.

<i> 若 $r>n$，则 AB 任一 r 阶子式全为0

<ii> 若 $r\le n$，则 $AB\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum\limits_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$

证明　设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是 m 阶矩阵且

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

因此

$$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 n} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_r 1} & a_{i_r 2} & \cdots & a_{i_r n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{nj_1} & b_{nj_2} & \cdots & b_{nj_r} \end{pmatrix}.$$

由上述定理可知：当 $r>n$ 时，$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}=0$；当 $r\le n$ 时，

$$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} = \sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_r\le n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}. \quad \square$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子式

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

如果满足条件 $i_1=j_1, i_2=j_2, \cdots, i_r=j_r$，则称之为主子式.

Def 主子式 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$，若 $i_1=j_1, \cdots, i_r=j_r$，

则称之为A的主子式

Cor1 设A为m×n实矩阵，则AA'的所有主子式全大于等于0

pf ⟨i⟩ 若$r>n$，则AA'任一r阶子式都为0，✓

⟨ii⟩ 若$r\le n$，则 $AA'\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \sum\limits_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A'\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$

$= \sum\limits_{1\le k_1<\cdots<k_r\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix}^2$ （行列式取转置后值不变）

Cor2 (Lagrange恒等式) $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 = \sum\limits_{1\le i<j\le n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \quad (n\ge 2)$

eg $(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2) - (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 = (a_1b_2-a_2b_1)^2 + (a_1b_3-a_3b_1)^2 + (a_2b_3-a_3b_2)^2$

pf: 左边 $= \begin{vmatrix} \Sigma a_i^2 & \Sigma a_ib_i \\ \Sigma a_ib_i & \Sigma b_i^2 \end{vmatrix} = \left| \underset{\substack{A \\ 2\times n}}{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}} \underset{\substack{B \\ n\times 2}}{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}} \right| \overset{C-B}{=\!=} \sum\limits_{1\le i<j\le n} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = \sum\limits_{1\le i<j\le n} (a_ib_j - a_jb_i)^2$ #

Cor3 (cauchy不等式) a_i、b_i全为实数，则 $\left(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2\right) \ge \left(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$ 由cor2即得#

Cor4 设A、B为n阶方阵，则$(AB)^* = B^*A^*$

pf: 比较两边的第(i,j)元素

$(AB)^*$的第(i,j)元 = AB的第(j,i)元的代数余子式

$= (-1)^{j+i} AB\begin{pmatrix} 1\cdots\hat{j}\cdots n \\ 1\cdots\hat{i}\cdots n \end{pmatrix}$

$\overset{C-B}{=\!=} (-1)^{j+i}\cdot\sum\limits_{k=1}^n A\begin{pmatrix} 1\cdots\hat{j}\cdots n \\ 1\cdots\hat{k}\cdots n \end{pmatrix} B\begin{pmatrix} 1\cdots\hat{k}\cdots n \\ 1\cdots\hat{i}\cdots n \end{pmatrix}$

$= \sum\limits_{k=1}^n A_{jk}B_{ki}$

$= A^*$的第j列 · B^*的第i行

$= B^*\cdot A^*$的第(i,j)元素 #

PRO总结

转置

① $(A^T)^T = A$

② $(AB)^T = B^TA^T$

③ $|A^T| = |A|$

④ $(cA)^T = cA^T$

A^{-1}

① 若存在，必唯一

② 乘法消去律与数性对非异阵成立

③ $(A^{-1})^{-1} = A$

④ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

⑤ $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$

⑥ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$

⑦ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

A^* (n≥2)

① A^*一定存在，且满足$AA^* = A^*A = |A|E$

② $(A^*)^* = \begin{cases} |A|^{n-2}A & (n\ge 3) \\ A & (n=2) \end{cases}$

③ $(AB)^* = B^*A^*$

④ $(cA)^* = c^{n-1}A^*$ 由定义易证

⑤ $|A^*| = |A|^{n-1}$

⑥ $(A^T)^* = (A^*)^T$

⑦ $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

⑤ Case 1: 若A可逆

则 $A^* = |A|A^{-1}$

$|A^*| = \left||A|A^{-1}\right| = |A|^n\cdot|A|^{-1} = |A|^{n-1}$

Case 2: 若A奇异，

则只需证 $|A^*| = 0$

∃非异阵P, Q, st $A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$

利用相抵标准型

$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{cases} 0 & (r\le n-2) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (r=n-1) \\ I_n & (r=n) \end{cases}$

⑤可用摄动法证明

故 $r<n$，$\left|\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*\right| = 0$

$|A^*| = \left|\left(P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q\right)^*\right| = \left|Q^*\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*P^*\right| = |Q^*|\left|\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*\right||P^*| = 0$ #

② 当n=2， $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$A^* = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$，$(A^*)^* = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，✓

当n≥3， Case1：当A非异，$A^* = |A|\cdot A^{-1}$，

$(A^*)^* = (|A|\cdot A^{-1})^* = |A|^{n-1}(A^{-1})^* = |A|^{n-1}(A^*)^{-1} = |A|^{n-2}\cdot A$

Case2：当A奇异，$|A|=0$，故只需证 $(A^*)^* = 0$

而 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{**} = \begin{cases} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & (n=2, r=1) \quad \times \\ I_n & (r=n) \quad \times \\ 0 & (其它) \end{cases}$

由 $0\le r<n$，$n\ge 3$，

$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$，

$A^* = Q^*\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^*P^*$，$(A^*)^* = P^{**}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{**}Q^{**} = 0$ #.

P113. 43、45、46
P108. 2、3、4

补充 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xlongequal{AC=CA} |AD-CB|$ （A可逆与不可逆皆可）

pf

1° $|A|\neq 0$ $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-CA^{-1}r_1} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A||D-CA^{-1}B|$

$= |AD-ACA^{-1}B|$

$= |AD-CB|$

2° $|A|=0$ 令 $\chi_A(\lambda)=|\lambda E+A|=0 \Longrightarrow \lambda = x_1, \cdots, x_n$

i.e. $\forall \lambda \in K\backslash\{x_1,\cdots x_n\}$，$|\lambda E+A|\neq 0$

$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E+A & B \\ C & D \end{vmatrix} \xlongequal{1^\circ\text{中结论}} |(\lambda E+A)D-CB| = g(\lambda)$

记 $F(\lambda)=f(\lambda)-g(\lambda)$，$F(\lambda)=0, \forall \lambda \in K\backslash\{x_1,\cdots,x_n\}$

而 $F(\lambda)$ 为多项式时只有有限个根，

又 $\lambda \in K\backslash\{x_1,\cdots,x_n\}$ 有无穷多取值，

故 $F(\lambda)\equiv 0$

$\therefore f(\lambda)=g(\lambda), \forall \lambda \in K$.

esp. $\lambda=0$ 时，$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD-CB|$ #