第三章 线性空间

§1. 线性空间的定义

令 $K^n=\{(a_1,a_2,a_3\cdots a_n)\mid a_i\in K(数域),\ i=1.2\cdots n\}$
称为n维向量

规定 $(a_1.a_2\cdots a_n)=(b_1.b_2\cdots b_n):\Longleftrightarrow a_i=b_i\ (i=1.2\cdots n)$ （:= 为定义）

规定加法 $(a_1.a_2\cdots a_n)+(b_1.b_2\cdots b_n):=(a_1+b_1.a_2+b_2\cdots a_n+b_n)$

数量乘法：$k(a_1,a_2\cdots a_n):=(ka_1,ka_2\cdots ka_n)$
非0数

∴满足运算法则 [(0.0⋯0)称为零向量] ∴ 加法：4条；数量乘法：4条

如：平面上以定点O为起点的所有向量组成的集合.

　　直线上以定点O为起点的所有向量组成的集合.

domain　codomain
定义域　陪域

若对应法则 $f:\ A\longrightarrow B$　　那么称f是A到B的一个映射
$a\longrightarrow b$
每一个　唯一的
b在f下的一个原像　a在f下的像.记作 $f(a)$

f的值域(或像) $f(A):=\{f(a)\mid a\in A\}$　　若 $f(A)=B$ 则f称为满射
$\mathrm{Im}f$

若A中不同元素在f下的像不同，则称f为单射

若f既单射.又满射.则称f为双射(又称一一对应)

Z集合中　$2+3=5$　$2\times3=6$　$2\div3=\frac{2}{3}$
$(2,3)\to5$　$(2,3)=6$　$(2,3)=\frac{2}{3}$ ↖不是Z的运算

$S\times M:=\{(a,b)\mid a\in S.\ b\in M\}$

称为S与M的笛卡尔积

定义1: 非空集合S上的一个代数运算是指$S\times S$到S的一个映射

定义3: 设V是一个非空集合，K是一个数域，如果V上有一个运算，称为加法，即$(\alpha,\beta)\to\alpha+\beta$，

K与V之间有一个运算，称为数量乘法 即 $K\times V\to V:(k,\alpha)\Rightarrow k\alpha$，且满足下述8条运算法则

1° $\alpha+\beta=\beta+\alpha$. $\forall\alpha,\beta\in V$ (加法交换律)

2° $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$. $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V$ (加法结合律)

3° V中有一个元素，记成0，它有下述性质

$\alpha+0=\alpha$，$\forall\alpha\in V$，把0称为V的零元

4° 对于$\alpha\in V$，有$\beta\in V$. s.t. $\alpha+\beta=0$，把β称为V的负元.

5° $1\alpha=\alpha$. $\forall\alpha\in V$

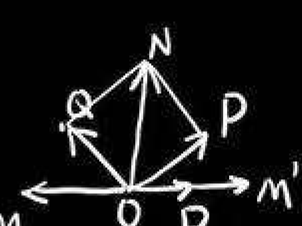
6° $(kl)\alpha=k(l\alpha)$. $\forall k,l\in K$, $\alpha\in V$

7° $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$. $\forall k,l\in K$, $\alpha\in V$

8° $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$，$\forall k\in K$, $\alpha,\beta\in V$

则称V为数域K上的一个线性空间

把V中的元素称为一个向量，线性空间也称为向量空间



例1: 几何空间

{以定点O为起点的所有向量}

例2: $K^n:=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in K,\ i=1,2,\cdots,n\}$ 是数域K上的一个线性空间.

n维向量

n维向量

例3: $\mathbb{R}^X:=\{$非空集合X到$\mathbb{R}$的映射$\}$称为X上的一个实值函数.

规定: $(f+g)(x):=f(x)+g(x)$. $\forall x\in X$.

$(kf)(x):=kf(x)$. $\forall x\in X$

零函数 $0(x)=0$. $\forall x\in X$

易验证: $\mathbb{R}^X$是$\mathbb{R}$上的一个线性空间

设V是数域K上的一个线性空间

(1). V的零元唯一

证: 设 $0_1, 0_2$ 都是V的零元, 则

$$0_1 = 0_1 + \underbrace{0_2}_{\text{零元}} = 0_2 + \underbrace{0_1}_{\text{零元}} = 0_2$$

(2) 每个 $\alpha \in V$ 的负元唯一, 记作 $-\alpha$

证: 设 β_1, β_2 都是 α 的负元, 则

$$\begin{array}{l} \beta_1 + (\alpha + \beta_2) = \beta_1 + 0 = \beta_1 \\ \quad \| \\ (\beta_1 + \alpha) + \beta_2 = (\alpha + \beta_1) + \beta_2 = 0 + \beta_2 = \beta_2. \end{array}$$

(3). $\underset{\text{数字}}{0}\,\alpha = \underset{\text{元素}}{0}$, $\forall \alpha \in V$

证: $0\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0\alpha$

两边加上 -0α 得: $0\alpha + (-0\alpha) = (0\alpha + 0\alpha) + (-0\alpha)$

$$0 = 0\alpha.$$

(4). $k \cdot 0 = 0$. $\forall k \in K$.

证: $k0 = k(0+0) = k0 + k0$

从而: $k0 + (-k0) = (k0 + k0) + (-k0)$

于是: $0 = k \cdot 0$

(5). 若 $k \cdot \alpha = 0$, 则 $k = 0$ 或 $\alpha = 0$

证: 假设 $k \neq 0$, 则 $\alpha = 1\alpha = (k \cdot k^{-1})\alpha = k^{-1}(k\alpha)$

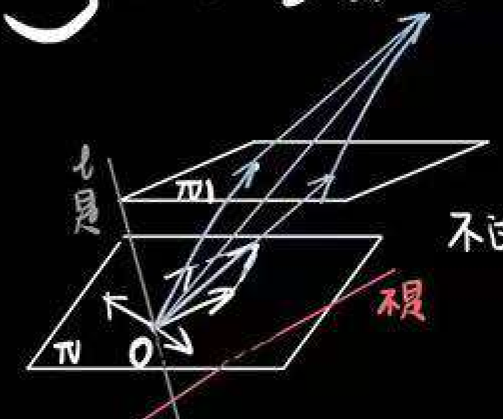
已知 $\Rightarrow k^{-1} \cdot 0 = 0$

(6) $(-1)\alpha = -\alpha$. $\forall \alpha \in V$

证: $\alpha + (-1)\alpha = 1\alpha + (-1)\alpha = [1 + (-1)]\alpha = 0\alpha = 0$

因此 $(-1)\alpha = -\alpha$

§2. 线性子空间



不过原点O的平面不是几何平面子空间

定义1：设V是数域K上一个线性空间，U是α的一个非空子集.

若U对V的加法和数量乘法也成为数域K上的一个线性空间. 那么称U是V的一个线性子空间.

V的非空子集U是子空间

⟺ (1). 若$\alpha,\beta\in U$. 则$\alpha+\beta\in U$ (U对V的加法封闭)

(2). 若$\alpha\in U$. $k\in K$. 则$k\alpha\in U$ (U对V的数乘封闭)

证：⟹ 由定义1得到

⟸ V的加法和数乘限制到U上就是U的加法和数量.

显然 1° 2° 5° 6° 7° 8° 成立

由于$U\neq\emptyset$. 因此有$\beta\in U$. 从而$0=0\cdot\beta\in U$ (3°满足)

每个$\alpha\in U$. 因此$-\alpha=(-1)\cdot\alpha\in U$. (4°满足)

从而U成为数域K上的一个线性空间，于是U是V的一个子集

$V\times V:=\{(a,b)\mid a,b\in V\}$

$V\times V\to V$ V和V的笛卡尔积到V的

$(a,b)\to c$

$(2+3\to 5)$ 一个映射称为

V的一个代数运算

$K\times V\to V$ 称作V的数量乘法

$(k,\alpha)\to \gamma$ (记作$k\alpha$)

{0}，V是V的子空间(狭义)

↓

记成0

令$W=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1\cdots k_s\in K\}$

↓

称为向量组$\alpha_1\cdots\alpha_s$的一个线性组合

$0\in W$， $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\alpha_1+\cdots+l_s\alpha_s=(k_1+l_1)\alpha_1+\cdots+(k_s+l_s)\alpha_s$ $\quad a(k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s)=ak_1\alpha_1+\cdots+ak_s\alpha_s$

易证. W对于V的加法，数量乘法封闭

因此. W是V的一个子空间，称它是由向量组$\alpha_1\cdots\alpha_s$生成的子空间. 记作$\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle$或$L(\alpha_1\cdots\alpha_s)$

$\beta\in\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle$ ⟺ 存在K中一组数$l_1\cdots l_s$. 使得$\beta=l_1\alpha_1+\cdots+l_s\alpha_s$. 此时称$\beta$可以由向量组$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性表出

数域K上n元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \quad (K^s)$$

$x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$ 有解 $\Longleftrightarrow$ 有K中一组数 $c_1\cdots c_s$ 使得 $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=\beta$

$\Longleftrightarrow \beta$ 可以由列向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性表出.

$\Longleftrightarrow \beta\in\langle\alpha_1\cdots\alpha_n\rangle$

§3. 线性相关与线性无关向量组

任务：研究线性空间和它的子空间的结构.

$\vec{c}$ 与 $\vec{a}(\neq\vec{0})$ 共线 $\Longleftrightarrow \vec{c}=\lambda\vec{a}$. 其中 $\lambda\in R \Longleftrightarrow -\lambda\vec{a}+\vec{c}=\vec{0}$.

$\vec{a}$ 与 $\vec{c}(\neq\vec{0})$ 共线 $\Longleftrightarrow \vec{a}=\mu\vec{c}$. 其中 $\mu\in R \Longleftrightarrow 1\cdot\vec{a}-\mu\vec{c}=\vec{0}$

从而 $\vec{c}$ 与 $\vec{a}$ 共线 $\Longleftrightarrow$ 有不全为0的实数 $k_1.k_2$，使得 $k_1\vec{c}+k_2\vec{a}=\vec{0}$

$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线 $\Longleftrightarrow$ 从 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=\vec{0}$ 可推出 $k_1=k_2=0$

定义1：设V是数域K上的一个线性空间V中的一个向量组 $\alpha_1,\cdots\alpha_s\ (s\geq1)$

如果K中不全为0的数 $k_1\cdots k_s$, st. $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，则称向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性相关

否则称 $\alpha_1,\cdots\alpha_s$ 线性无关，即如果从 $k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=0$，可以推出 $k_1=\cdots=k_s=0$，即为 $\alpha_1\cdots\alpha_s$ 线性无关

(1) K^s 中，列向量 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 有K中不全为0的数 $c_1\cdots c_n$ st. $c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0$

$\Rightarrow$ K上n元齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 有非零解

从而：K^s 中，列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Rightarrow$ K上n元齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ 只有零解.

(2) K^n 中，列向量 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 以 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 为列向量组的矩阵A的行列式等于0

线性无关　　　　不等于0

(1) α 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 有 $k\neq0$. st. $k\alpha=0 \Rightarrow \alpha=0$.

线性无关 $\Longleftrightarrow \alpha\neq0$

(2) 当向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 如果有一个部分组线性相关，那么整个向量组线性相关

逆否：向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 如果线性无关，那么 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的任何一个部分组都线性无关.

(3) 含有 0 的任何一个向量组都线性相关.

(4). 向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s (s \geq 2)$ 线性相关 $\Longleftrightarrow$ 其中至少有一个向量可以由其余向量线性表出

证："$\Rightarrow$" 由定义1得，有K中不全为0的数 $k_1 \cdots k_s$ s.t. $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ (1).

设 $k_i \neq 0$. 由(1)式得 $\alpha_i = -\frac{k_1}{k_i}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_{i-1}}{k_i}\alpha_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i}\alpha_{i+1} - \cdots - \frac{k_s}{k_i}\alpha_s$

"$\Leftarrow$" 设 $\alpha_j = l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j-1}\alpha_{j-1} + l_{j+1}\alpha_{j+1} + \cdots + l_s\alpha_s$

则 $0 = l_1\alpha_1 + \cdots + l_{j-1}\alpha_{j-1} - \alpha_j + l_{j+1}\alpha_{j+1} + l_s\alpha_s$

因此 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关

向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关 $\Longleftrightarrow$ 其中每一个向量都不能由其余向量线性表出

命题1：设 β 可以由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出，则表出方式唯一 $\Leftarrow$ $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关

证："$\Leftarrow$" 设 $\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s$，若还有 $\beta = b_1\alpha_1 + \cdots + b_s\alpha_s$

两式相减得 $0 = (a_1 - b_1)\alpha_1 + \cdots + (a_s + b_s)\alpha_s$ (2)

由于 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关，因此，从(2)式得 $a_1 - b_1 = 0, \cdots a_s - b_s = 0$ 即 $a_1 = b_1 \cdots a_s = b_s$.

因此 β 由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出方式唯一.

"$\Rightarrow$" 假如 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关，则有K中不全为0的数 $k_1 \cdots k_s$ s.t. $0 = k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s$

由已知 $\beta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_s\alpha_s$ (3)

两式相加得 $\beta = (k_1 + a_1)\alpha_1 + \cdots + (k_s + a_s)\alpha_s$ (4)

由于 $k_1 \cdots k_s$ 不全为0，因此 $(k_1 + a_1, \cdots, k_s + a_s) \neq (a_1 \cdots a_s)$

从而 β 至少有两种不同方式表出. 与已知条件矛盾，因此 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关.

命题2：设 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性无关，如果 $\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta$ 线性相关. 那么 β 可以由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出

证：由于 $\alpha_1 \cdots \alpha_s, \beta$ 线性相关，因此，有K中不全为0的数 $k_1 \cdots k_s, l$ s.t. $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s + l\beta = 0$ (5)

假如 $l = 0$. 则从(5)式得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$ (6)，由于此时 $k_1 \cdots k_s$ 不全为0，因此 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关

与已知矛盾，得 $l \neq 0$

(5)式两边除以 l 得 $\beta = -\frac{k_1}{l}\alpha_1 - \cdots - \frac{k_s}{l}\alpha_s$

§4. 极大线性无关组，向量组的秩

$\langle \alpha_1 \cdots \alpha_s \rangle = \{ k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \mid k_i \in K, i=1,\cdots,s \}$

当 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性相关时，

定义1：向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的一个部分组如果满足两个条件：

(1) 这个部分组线性无关

(2) 从这个向量组的其余向量中（如果有）任取一个添出来，得到的新的部分组线性相关，

那么称这个部分组为这个向量组的一个极大线性无关组

向量组 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ 如图所示

$\vec{a}, \vec{b}$ 是一个极大线性无关组

$\vec{a}, \vec{c}$ / $\vec{b}, \vec{c}$

设向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的一个极大线性无关组（不妨设）为 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ $(m \le s)$

由于 $\alpha_j = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{j-1} + 1\alpha_j + 0\alpha_{j+1} + \cdots + 0\alpha_s$

因此，$\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 中每一个向量都可以由 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出。

反之，α_i $(1 \le i \le m)$ 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性表出，而 α_j $(m < j \le s)$，由于定义1：$\alpha_1 \cdots \alpha_m, \alpha_j$ 线性相关，据§3命题2，得 α_j 可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性表出

那么 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 中每一个向量都可由 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ 线性表出。

定义2：若向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 中每一个向量都可以由向量组 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 线性表出，则称 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 可以由 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 线性表出

若向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与向量组 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 可以互相线性表出，则称这两个向量组等价　记作 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_r\}$

由上述讨论证明了：

命题1：向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 与它的任意一个极大线性无关组等价。

向量组的等价具有性质：

(1) 每个向量组与自身等价（反身性）

(2) 若 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_r\}$，则 $\{\beta_1 \cdots \beta_r\} \cong \{\alpha_1 \cdots \alpha_s\}$（对称性）

(3) 若 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\} \cong \{\beta_1 \cdots \beta_r\}$, $\{\beta_1 \cdots \beta_r\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_t\}$, 则 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_t\}$. 只需证线性表出有传递性 (传递性)

$a_1b_1 + \cdots + a_1b_n +$

$a_2b_1 + \cdots + a_2b_n + \cdots +$

$$a_nb_1 + \cdots + a_sb_n = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{s} a_ib_j\right)$$

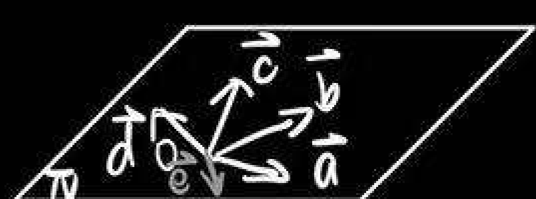
证: $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\beta_j$, $i = 1 \cdots s$. $\beta_j = \sum_{l=1}^{t} b_{jl}\gamma_l$ $j = 1 \cdots r$

因此 $\alpha_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\left(\sum_{l=1}^{t} b_{jl}\gamma_l\right) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{t} a_{ij}b_{jl}\gamma_l = \sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jl}\right)\gamma_l$ $(i = 1 \cdots s)$

从而 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 可由 $\gamma_1 \cdots \gamma_t$ 线性表出

由向量组等价的对称性和传递性得

命题2: 向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 的任意两个极大线性无关组等价



向量组 $\vec{a}.\vec{b}.\vec{c}.\vec{d}.\vec{e}$

$\vec{c}.\vec{d}.\vec{e}$ 可由 $\vec{a}.\vec{b}$ 线性表出

$3 > 2$

$\vec{c}.\vec{d}.\vec{e}$ 线性相关

引理1: 设向量组 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 可由向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出. 如果 $r > s$, 那么 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 一定线性相关

证: 由已知. $\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{s1}\alpha_s$
$\vdots$
$\beta_r = a_{1r}\alpha_1 + \cdots + a_{sr}\alpha_s$

$x_1\beta_1 + \cdots + x_r\beta_r = x_1(a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{s1}\alpha_s) + \cdots + x_r(a_{1r}\alpha_1 + \cdots + a_{sr}\alpha_s)$

$$= \underbrace{(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r)}_{=0}\alpha_1 + \cdots + \underbrace{(a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sr}x_r)}_{=0}\alpha_s \quad (1)$$

方程组

考虑 $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = 0 \\ \vdots \\ a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sr}x_r = 0 \end{cases}$ (2)

由已知, $\underset{\text{方程个数}}{s} < \underset{\text{未知量个数}}{r}$, 因此(2)必有非零解. 取一个非零解 $(k_1 \cdots k_r)$. 则由(1)(2)式得 $k_1\beta_1 + \cdots + k_r\beta_r = 0$

因此. $\beta_1 \cdots \beta_r$ 线性相关

推论1 (逆否): 设向量组 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 可由向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_s$ 线性表出. 如果 $\beta_1 \cdots \beta_r$ 线性无关, 那么 $r \le s$

推论2： 等价的线性无关的两个向量组，所含向量个数相等

证：已知$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\gamma_1,\cdots,\gamma_m\}$且线性无关，由于$\underset{\text{线性无关}}{\underline{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}}$可由$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$线性表出，因此$s\leq m$

$\gamma_1,\cdots,\gamma_m$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出，因此$m\leq s$ 〉推论一 $\Rightarrow s=m$.

推论3： 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的任意两个极大线性无关组所含向量个数相等.

定义3： 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的任意一个极大线性无关组所含个数称为向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的秩，记作$\text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$

只含0的向量组的秩规定为0.

命题3： 向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关$\Longleftrightarrow \text{rank}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}=s$

证：$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组

命题4： 向量组(Ⅰ)可以由向量组(Ⅱ)线性表出，则$\text{rank}(\text{Ⅰ})\leq\text{rank}(\text{Ⅱ})$

证：(Ⅰ)的一个极大线性无关组(Ⅰ)$'$可以由(Ⅱ)的一个极大线性无关组(Ⅱ)$'$线性表出

据推论1：(Ⅰ)$'$向量个数 $\leq$ (Ⅱ)$'$向量个数

$\qquad\qquad\quad\ \ \|\qquad\qquad\qquad\ \ \|$

$\qquad\qquad\text{rank(Ⅰ)}\qquad\quad\ \ \text{rank(Ⅱ)}$

推论4： 等价的两个向量组拥有相等的秩.

§5. 基与维数. 坐标

设V是数域K上的线性空间.

定义1： V的一个有限子集$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$线性相(无)关 $:\Longleftrightarrow$ 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相(无)关

V的一个无限子集S线性相关$:\Longleftrightarrow$ S有一个有限子集是线性相关

从而：V的无限子集S线性无关$:\Longleftrightarrow$ S的任何一个有限子集都线性无关.（空集定义为线性无关）

定义2： 设V是数域K上的线性空间. V的一个子集S如果满足下述两个条件：

1°. S是线性无关的；

2°. V中任一向量可以由S中的有限多个向量线性表出.

那么称S是V的一个基.

在定义2中, 若$S=\{\alpha_1 \cdots \alpha_s\}$, 则向量组$\alpha_1 \cdots \alpha_s$是$V$的一个(有序)基.

$\{0\}$的一个基规定是$\varnothing$

定理1: 任何一个数域上的任何一个线性空间都有一个基

定义3: 若V有一个基是有限子集, 则称V是有限维的

若V有一个基是无限子集, 则称V是无限维的

定理2: 若V是有限维的, 则V的任意两个基所含向量的个数相等

证: V有一个基是$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$, 任取$V$的另外一个基$S$. 假如$S$所含向量个数$>n$, 则$S$中可取$n+1$个向量$\beta_1 \cdots \beta_{n+1}$

不对

$\beta_1 \cdots \beta_{n+1}$可以由$\alpha_1 \cdots \alpha_n$线性表出, 且$n+1>n$.

根据§4的引理1, $\beta_1 \cdots \beta_{n+1}$线性相关, 这与$S$为基矛盾

$\therefore S$所含向量个数$\le n$, 设$S=\{\beta_1 \cdots \beta_m\}$, 其中$m \le n$

由于$\underbrace{\{\beta_1 \cdots \beta_m\}}_{基} \cong \underbrace{\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}}_{基(线性无关)}$, 据§4的推论2. 得$m=n$

互相表出

推论1: 若V是无限维的, 则V的任何一个基都是无限子集.

证: 假如V有一个基是有限子集$\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$, 根据定理2证明可得, V的任何一个基所含向量个数为n

与V是无限维的矛盾.

定义4: 设V是有限维的, 则把V的一个基所含向量个数称为线性空间V的维数. 记作$\dim_K V$ or $\dim V$.

若V是无限维的, 则把V的维数记作$\dim V=\infty$

$\{0\}$的维数为0

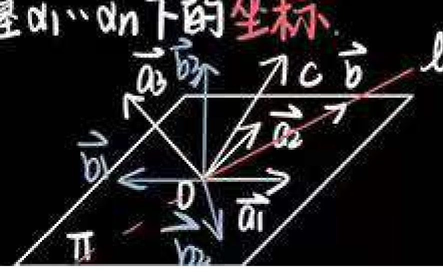
命题1: 设V是n维的, 则V中任意$n+1$个向量都线性相关

证: 据定理2的证明过程得到

设$\dim V=n$. 取V的一个基$\underbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_n}_{线性无关}$, 则$V$中任何一个向量$\alpha=a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n$ 且表出方式唯一(§3命题)

把$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$称为$\alpha$在基$\alpha_1 \cdots \alpha_n$下的坐标.

例1: 几何空间



中三个不共面的向量是一个基. 从而几何空间是三维的.

过定点O的平面π是2维的

过原点O的直线l是1维的

例2：K^n中向量组 $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \cdots \varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 是线性无关的

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\a_2\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

因此，$\varepsilon_1,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$是$K^n$的一个基（称为标准基），$\alpha$在基上坐标$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\alpha$.

命题2：设$\dim V=n$，则V中任意n个线性无关向量都是V的一个基.

证：设$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关，任取$\beta\in V$.

据命题1：$\underbrace{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\text{线性无关}},\beta$线性相关，据§3.命题2，$\beta$可由$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性表出，得$\alpha_1\cdots\alpha_n$是$V$的一个基

命题3：设$\dim V=n$，若V中每一个向量可以由$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性表出，则$\alpha_1\cdots\alpha_n$是V的一个基.

证：取V的一个基$\delta_1\cdots\delta_n$，由已知得，$\delta_1\cdots\delta_n$可由$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性表出.

于是 $n=\operatorname{rank}\{\underbrace{\delta_1\cdots\delta_n}_{\text{线性无关}}\}\leq\operatorname{rank}\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}\leq n$，所以 $\operatorname{rank}\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}=n$

从而$\alpha_1\cdots\alpha_n$线性无关，因此$\alpha_1\cdots\alpha_n$是V的一个基.

命题4：设$\dim V=n$，则V中任意一个线性无关的向量组都可以扩充成V的一个基.

证：假设$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性无关，若$s=n$，则$\alpha_1\cdots\alpha_n$是V的一个基（据命题2）

下设$s<n$，则$\alpha_1\cdots\alpha_s$不是V的一个基，从而V中有向量β_1不能由$\alpha_1\cdots\alpha_s$线性表出.

于是$\alpha_1\cdots\alpha_s,\beta_1$必定线性无关

若$s+1<n$ $\cdots\Rightarrow\alpha_1\cdots\alpha_s\beta_1\cdots\beta_r$线性无关且$s+r=n$，$\Rightarrow\alpha_1\cdots\alpha_s\beta_1\cdots\beta_r$是$V$的一个基.

命题5：设$\dim V=n$，W是V的一个子空间，则$\dim W\leq\dim V$.

证：W中取一个基$\alpha_1\cdots\alpha_m$，可以扩充成V的一个基，$\alpha_1\cdots\alpha_m,\alpha_{m+1}\cdots\alpha_n$，因此$\dim W\leq\dim V$

若$\dim W=\dim V=n$，则W中一个基$\underbrace{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\text{线性无关}}$，从而$\alpha_1\cdots\alpha_n$是$V$的一个基，于是$V$中任一向量$\beta=b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n\in W$.

从而$V\subseteq W$，因此$V=W$.

定义5：设V是数域K上的线性空间，V的一个子集S如果满足：

1°. S线性无关

2° 对于$\beta\notin S$（若有的话），有$S\cup\{\beta\}$线性相关，那么称S是V的一个极大线性无关集

S是V的一个基 $\Longleftrightarrow$ S是V的一个极大线性无关集

当$V\neq\{0\}$时

$\{0\}$. $\emptyset$满足定义5的1°, 对于$0\notin\emptyset$. 有$\emptyset\cup\{0\}=\{0\}$是线性相关的

因此, $\emptyset$是$\{0\}$的一个极大线性无关集

$\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle := \{k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s \mid k_1\cdots k_s\in K\}$

子空间

$\alpha_1\cdots\alpha_s$的一个极大线性无关组是$\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle$的一个基.

从而 $\dim\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle = \operatorname{rank}\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}$.

向量组

命题7: $\langle\alpha_1\cdots\alpha_s\rangle=\langle\beta_1\cdots\beta_r\rangle \Longleftrightarrow \{\alpha_1\cdots\alpha_s\}\cong\{\beta_1\cdots\beta_r\}$

$\alpha_1\cdots\alpha_s$均可由$\beta_1\cdots\beta_r$线性表出, 反之亦然.

§6. 矩阵的秩

数域K上 $s\times n$矩阵A

$\in K^s$ $\quad\in K^n$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}\begin{matrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_s\end{matrix}\ \text{行向量组.}$$

$\alpha_1 \cdots \alpha_n$. 列向量组.

A的列秩: $\operatorname{rank}\{\alpha_1\cdots\alpha_n\}$ $\quad$ A的行秩: $\operatorname{rank}\{\gamma_1\cdots\gamma_n\}$

$\parallel$

A的列空间: $\dim\langle\alpha_1\cdots\alpha_n\rangle$ $\quad$ A的行空间 $\dim\langle\gamma_1\cdots\gamma_n\rangle$

探讨: 矩阵的行秩和列秩有什么关系?

定理1: 数域K上$s\times n$阶梯形矩阵J的列秩=J的行秩=J的非零行的个数. 并且J的主元所在的列构成J的列向量组的一个极大线性无关组

设J的非0行的个数为r, 从而J有r个主元.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix}\alpha_1 & \cdots & & \alpha_{j_1} & \cdots & \alpha_{j_2} & \cdots & \alpha_{j_r} & & \alpha_n\end{matrix}\\ J=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1j_1} & \cdots & c_{1j_2} & \cdots & c_{1j_r} & \cdots & c_{1n}\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 & c_{2j_2} & \cdots & c_{2j_r} & \cdots & c_{2n}\\ \vdots & & & & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots 0 & c_{rj_r} & \cdots & c_{rn}\\ 0 & & & & & & & & & 0\\ \vdots & & & & & & & & & \vdots\\ 0 & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \\ \gamma_r\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \end{array}$$

主元

延伸组

证: $\begin{pmatrix} c_{1j_1}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{1j_2}\\ c_{2j_2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} c_{1j_r}\\ c_{2j_r}\\ \vdots\\ c_{rj_r}\end{pmatrix}$ 线性无关

行列式$\neq0$ $\quad$ 根据上册P89. 结论(7). 线性无关的列向量

每个向量添加m个分量(位置相同)称为原向量组的延伸组$\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \cdots \alpha_{jr}$ 也线性无关

从而 $\dim\langle\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \cdots \alpha_{jr}\rangle = \operatorname{rank}\{\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \cdots \alpha_{jr}\} = r$

考虑：$U = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a_1 \cdots a_r \in K \right\} \subseteq K^s$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_1\underline{\varepsilon_1} + \cdots + a_r\underline{\varepsilon_r}$ 线性无关

U的一个基是$\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r$ 从而 $\dim U = r$.

显然：$\langle\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{jn}\rangle \subseteq \langle\alpha_1 \cdots \alpha_n\rangle \subseteq U$

从而 $r = \dim\langle\alpha_{j1} \cdots \alpha_{jn}\rangle \le \dim\langle\alpha_1 \cdots \alpha_n\rangle \le \dim U = r$

因此 $\dim\langle\alpha_1 \cdots \alpha_n\rangle = r$.

$\dim\langle\alpha_1 \cdots \alpha_n\rangle$ = J的列秩 $= r$ 并且$\alpha_{j1}, \alpha_{j2} \cdots \alpha_{jr}$是J的列向量组的一个极大线性无关组.

易证：
$$\begin{array}{l} (\boxed{c_{1j1}}\ c_{1j2} \cdots c_{1jn}) \\ (0\ \ \boxed{c_{2j2}} \cdots c_{2jn}) \\ \vdots \\ (0\ \ 0 \cdots \boxed{c_{rjr}}) \end{array}$$
向量组的秩为r，线性无关 则其中$\forall$ r个线性无关的向量组均为一个极大线性无关组

从而它们的延伸组$\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_r$也线性无关.

于是J的行向量$\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_r, 0 \cdots 0$的极大线性无关组是$\gamma_1, \gamma_2 \cdots \gamma_r$.

从而J的行秩 $= r$.

定理2： 矩阵初等行变换不改变行秩

证：设矩阵$A \xrightarrow{ⓙ + ⓘ \cdot k} B$.

行向量组$\{\gamma_1 \cdots \gamma_i \cdots \boxed{\gamma_j} \cdots \gamma_s\} \cong \{\gamma_1 \cdots \gamma_i \cdots \gamma_j + k\gamma_i \cdots \gamma_s\}$ (除γ_j 其余显然可由另一组线性表出).

$\gamma_j = (\gamma_j + k\gamma_i) + (-k\gamma_i)$ 可由B表出.

从而A的行秩 = B的行秩

设 $A \xrightarrow{(ⓘ, ⓙ)} C$，显然A的行秩 = C的行秩

设 $A \xrightarrow[(\ell \neq 0)]{\ell ⓘ} E$. 显然A的行秩 = E的行秩

定理3： 矩阵初等行变换不改变列向量组线性相关性，从而不改变矩阵的列秩

设$A \xrightarrow{\text{初等行}} B$，若B的第$j_1 \cdots j_r$列是B的列向量组的一个极大线性无关组，

则A的第$j_1 \cdots j_r$列构成A列向量组的一个极大线性无关组

证：设矩阵C $\xrightarrow{初等行}$ D

列向量组$\gamma_1 \cdots \gamma_n$　$\delta_1 \cdots \delta_n$

系数矩阵C $\xrightarrow{初等行}$ 系数矩阵D → 第一章

齐次线性方程组 $x_1\gamma_1+\cdots+x_n\gamma_n=0$ 与 $x_1\delta_1+\cdots+x_n\delta_n=0$ 同解

从而 $x_1\gamma_1+\cdots+x_n\gamma_n=0$ 有非零解 $\Longleftrightarrow$ $x_1\delta_1+\cdots+x_n\delta_n=0$ 有非零解

$\Updownarrow$

$\gamma_1 \cdots \gamma_n$线性相关 $\longleftrightarrow$ $\delta_1 \cdots \delta_n$线性相关

设：$\underset{s\times n}{A}=\begin{array}{c}\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r} \\ \begin{pmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}\end{array} \xrightarrow{初等行} B=\begin{array}{c}\beta_{j_1}\ \beta_{j_r} \\ \begin{pmatrix} * & \times \\ * & \times \\ * & \times \end{pmatrix}\end{array}$ 且$\beta_{j_1} \cdots \beta_{j_r}$是B列向量组的一个极大线性无关组

$\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r}$组成的直矩阵$A_1 \xrightarrow{上述初等行} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_r}$组成B的直矩阵$B_1$

线性无关 $\Longleftarrow$ 已知线性无关

任取$\alpha_l \notin \{\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r}\}$　$\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r}, \alpha_l$按原顺序组成矩阵$A_2 \xrightarrow{上述初等行} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_r}, \beta_l$按原顺序组成矩阵$B_2$

线性相关　　　　已知：线性相关

因此：$\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r}$是A的列向量组的一个极大线性无关组

于是　A的列秩 = r = B的列秩

定理4： 任一矩阵A的行秩=列秩

证：把A $\xrightarrow{初等行}$ J（阶梯），从而A的行秩 $\xlongequal{定理2}$ J的行秩 $\xlongequal{定理1}$ J的列秩 $\xlongequal{定理3}$ A的列秩

定义1： 矩阵A的行秩与列秩统称为A的秩，记作rank（A）

推论1： 设A $\xrightarrow{初等行}$ J（阶梯），则 rank(A)=J的非0行个数，并且若J的主元所在的第$j_1 \cdots j_r$列

那么A的$j_1 \cdots j_r$列构成A的列向量组的一个极大线性无关组

由于A的行向量是A'的列向量，从而A的行秩 = A'的列秩. 因此

推论2： rank(A) = rank(A').

若A $\xrightarrow{初等列}$ B. 则与定理2证法类似：A的列秩=B的列秩. 于是 rankA=rankB. 因此.

推论3： 矩阵初等列变换不改变矩阵的秩.

定理5： $s\times n$的非0矩阵A的秩等于A的不为0的子式的最高阶数.

证：设rank(A)=r，不妨设A的前r行线性无关

这前r行组成的矩阵 $\left.\begin{pmatrix} * & \otimes & \otimes & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \otimes & \otimes & * \end{pmatrix}\right\}$ 前r行

记作A_1. 从而$\mathrm{rank}(A_1)=r$. 于是A_1有r列线性无关，它们组成的r阶子式不为0.

设$m>r$. 任取A的一个m阶子式 $A\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_m \\ l_1 & \cdots & l_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & \alpha_{l_1} & \alpha_{l_m} & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & \times & \times & \\ \times & \otimes & \otimes & \times \\ \times & \otimes & \otimes & \times \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{array} \end{array}$

由于rank A=r, ∴极大线无为r个向量.

∴$\alpha_{l_1} \cdots \alpha_{l_m}$线性相关(引理1). 于是它们的缩短组线性相关

即 $A\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_m \\ l_1 & \cdots & l_m \end{pmatrix}$的列向量组 于是$A\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_m \\ l_1 & \cdots & l_m \end{pmatrix}=0$.

因此A的不为0子式的最高阶数为r.

推论4： 设rank(A)=r. 则A的不为0的r阶子式所在的列是A的列向量组 $\alpha_1 \cdots \alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r} \cdots \alpha_n$ 的一个极大线性无关组
(行) (行)

证：这个r阶子式的列向量组线性无关. 从而他们的延伸组$\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r}$也线性无关

又由于rank A=r, 因此$\alpha_{j_1} \cdots \alpha_{j_r}$是A的列向量组的一个极大线性无关组

$\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \otimes & \otimes & \times \\ \times & \otimes & \otimes & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} \begin{array}{c} i_1 \\ i_r \end{array}$

定义2： 若n级矩阵A的秩等于n. 则A称为满秩矩阵

推论5： n级矩阵A满秩 $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

证：$\mathrm{rank}(A)=n \Longleftrightarrow$ A的不为0的最高阶数为n

§7. 线性方程组有解判别定理

定理1： 数域K上n元线性方程组有解 $\Longleftrightarrow$ 它的增广矩阵$\tilde{A}$与系数矩阵A的秩相等

系数列向量

$x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$ 有解. $\Longleftrightarrow \beta \in \langle \alpha_1 \cdots \alpha_n \rangle$. (见前子空间)

$\Longleftrightarrow \langle \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta \rangle \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} \langle \alpha_1 \cdots \alpha_n \rangle$

$\Longleftrightarrow \underbrace{\dim\langle \alpha_1 \cdots \alpha_n, \beta \rangle}_{\|} = \dim \underbrace{\langle \alpha_1 \cdots \alpha_n \rangle}_{子空间} \; \|$

$\Longleftrightarrow$ 增广矩阵$\tilde{A}$的秩 = 系数矩阵A的秩

有解时，$\widetilde{A}$ 经过初等行变换，化成的阶梯形矩阵的非0行的个数 r

$\text{rank}(\widetilde{A}) = \text{rank}(A) = n$ 时，方程组有唯一解.

当 $\text{rank}(A) = r < n$ 时，方程组有无穷多解.

推论1：数域K上n元齐次线性方程组有非零解 $\Longleftrightarrow \text{rank}(A) < n$

§8.齐次线性方程组解集的结构

数域K上n元齐次线性方程组 $x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n = 0$ (1). 的解集记作 W. 设(1)有非0解.

$W \subseteq K^n$

性质1：若 $\eta, \delta \in W$，则 $\eta + \delta \in W$

$\eta = (c_1 \cdots c_n)'$，$\delta = (d_1 \cdots d_n)'$，$\eta+\delta = (c_1+d_1, \cdots, c_n+d_n)'$ 是一个解.（对加法封闭）

证：$\begin{cases} c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = 0 \\ d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n = 0 \end{cases}$

相加得 $(c_1+d_1)\alpha_1 + \cdots + (c_n+d_n)\alpha_n = 0$

性质2、若 $\eta \in W$. $k \in K$. 则 $k\eta \in W$

∴(1)的解集 W 就是 K^n 的一个子空间，称 W 为齐次线性方程组(1)的解空间

当(1)有非0解时，求 W 的一个基的维数.

设 $\text{rank}(A) = r < n$

$A \xrightarrow{\text{初等行}} J$（阶梯形） 设J有 r 个主元. 不妨设它们分别分布在前 r 列，从而(1)的一般解为

（A：系数矩阵）

（主变量） （自由未知量）

$x_1 = -b_{1,r+1}x_{r+1} - b_{1,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{1,n}x_n$

$\vdots$

$x_r = -b_{r,r+1}x_{r+1} - b_{r,r+2}x_{r+2} \cdots - b_{r,n}x_n$.

让自由未知量 $x_{r+1} \cdots x_n$ 分别取 $n-r$ 组数. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ (2)

得到(1)的n-r个解.

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\ \vdots\\ -b_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad \eta_2=\begin{pmatrix}-b_{1,r+2}\\ \vdots\\ -b_{r,r+2}\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\quad \cdots,\eta_{n-r}=\begin{pmatrix}-b_{1,n}\\ \vdots\\ -b_{r,n}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\quad (3).$$

易看出向量组(2)线性无关，从而，它们的延伸组 $\eta_1,\eta_2\cdots\eta_{n-r}$ 也线性无关.

任取W的一个解向量 $\eta=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_r\\ c_{r+1}\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ 由一般解公式得 $c_1=-b_{1,r+1}c_{r+1}-\cdots-b_{1,n}c_n$

$\vdots$

$c_r=-b_{r,r+1}c_{r+1}-\cdots-b_{r,n}c_n.$

$$\text{从而 }\eta=\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}c_{r+1}-\cdots-b_{1,n}c_n\\ \vdots\\ -b_{r,r+1}c_{r+1}-\cdots-b_{r,n}c_n\\ 1\cdot c_{r+1}+\cdots+0\cdot c_n\\ 1\cdot 0+\cdots+1\cdot c_n\end{pmatrix}=c_{r+1}\begin{pmatrix}-b_{1,r+1}\\ \vdots\\ -b_{r,r+1}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+c_n\begin{pmatrix}-b_{1n}\\ \vdots\\ -b_{rn}\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$$=c_{r+1}\eta_1+\cdots\cdots+c_n\eta_{n-r}$$

因此 $\eta_1\cdots\eta_{n-r}$ 是W的一个基. 从而 $\dim W=n-r=n-\operatorname{rank}(A)$. 于是证明了

定理1：设K上n元齐次线性方程组(1)有解时，它的解空间W的维数：$\dim W=n-\operatorname{rank}(A)$.
系数矩阵

把W的一个基称为齐次线性方程组(1)的一个基础解系

设 $\eta_1\cdots\eta_{n-r}$ 是齐次线性方程组(1)的一个基础解系，则(1)的全部解为 $k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，$k_1\cdots k_{n-r}\in K$.

§9. 非齐次线性方程组解集的结构

数域K上n元非齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$.（其中 $\beta\neq 0$）(1) 的解集记作U.

相应的齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0$ (2) 的解集记作W.

性质1：若 $\gamma,\delta\in U$，则 $\gamma-\delta\in W$.

$\gamma=(a_1\cdots a_n)'$，$\delta=(b_1\cdots b_n)'$，$\gamma-\delta=(a_1-b_1,\cdots,a_n-b_n)'$

证：$\begin{cases}a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n=\beta\\ b_1\alpha_1+\cdots+b_n\alpha_n=\beta\end{cases}$ 两式相减得 $(a_1-b_1)\alpha_1+\cdots+(a_n-b_n)\alpha_n=0$

性质2：若$\nu\in U$，$\eta\in W$，则$\nu+\eta\in U$

$\nu = (a_1 \cdots a_n)'$，$\eta = (c_1 \cdots c_n)'$

证：$\begin{cases} a_1\alpha_1+\cdots+a_n\alpha_n=\beta \\ c_1\alpha_1+\cdots+c_n\alpha_n=0 \end{cases}$ 两式相加得$(a_1+c_1)\alpha_1+\cdots+(a_n+c_n)\alpha_n=\beta$.

设$\nu_0\in U$.（称ν_0是(1)的一个特解）

$\nu_0+W := \{\nu_0+\eta \mid \eta\in W\} \overset{\subseteq}{\underset{\supseteq}{=}} U$

任取$\nu\in U$，则$\underbrace{\nu-\nu_0}_{记作\eta}\in W$. 从而$\nu=\nu_0+\eta\in \nu_0+W$.

于是我们证明了：

定理1：数域K上n元非齐次线性方程组(1)的解集$U=\nu_0+W$

ν_0：(1)的一个解　W：相应齐次线性方程组的解空间

称为W型的一个线性流形或陪集

设W的一个基为$\eta_1\cdots\eta_{n-r}$，则非齐次线性方程组(1)的全部解为$\nu_0+k_1\eta_1+\cdots+k_{n-r}\eta_{n-r}$，其中$k_1\cdots k_{n-r}\in K$

ν_0是(1)的特解

二十二 15=40.

End

Congratulations