§1.1 微分方程及其解的定义

一、微分方程

<定义> 含有一个或几个自变量、未知函数以及未知函数的(偏)导数或微分的方程，称为微分方程.

若自变量只有一个 → 常微分方程；若自变量不止一个 → 偏微分方程.

<常微分方程一般形式> $F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0$ $\begin{cases} n=1, & \text{一阶方程} \\ n>1, & \text{高阶方程} \end{cases}$

→ 与微分方程有关的问题.

<例> 求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

先知: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\quad (\frac{x^n}{n!})'=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

$$\rightarrow S=S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

$$=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

$$S'=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots$$

$$S''=\frac{x}{1!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots$$

由于 $(S'')'=S$.
则对于 S,S',S'' 需解一方程
均形如 $S''+S'+S=0$.
那么区别 S,S',S'' 的解的即定点条件.

$S''+S'+S=e^x$

$S(0)=1$, $S'(0)=0$ —— 定点条件.

求 S?

→ 应用微分方程解决实际问题的基本方法和步骤.

1、步骤.

1° 建模(常微分方程模型)

2° 求解(精确解或近似解)或对解作定性分析(研究解的性质)

3° 解的实际意义(解释与预测)

2. 建立微分方程的基本方法.(主要方法)

1° 根据规律列方程 (物理、力学等)

2° 微元分析法

3° 模拟近似法 (生物、经济、医学等)

→ 微分方程的阶:

微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称之微分方程的阶.

一阶微分方程 $\begin{cases} F(x,y,y')=0 & \text{. 隐式方程} \\ y'=f(x,y) & \text{. 显式方程} \end{cases}$

转化为"一阶微分方程组"求解.

↑

高阶微分方程 $(n\geq 2)$ $\begin{cases} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 ^{※} & \text{，隐式方程} \\ y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) & \text{，显式方程} \end{cases}$

→ 线性与非线性微分方程：<关于y线性 例：$y'+P(x)y=Q(x)$>

若(※)式的左端F为y及其各阶导数的一次有理整式，则称(※)式为线性方程；否则，称(※)式为非线性方程.

→ $2y\,dx-(4x+y^2)dy=0 \xrightarrow{\text{变形}} \begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{4x+y^2} & \rightarrow \text{关于y非线性} \\ \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{4x+y^2}{2y} & \rightarrow \text{关于x线性} \end{cases}$

(ps：非定x线)

二、微分方程的解

<定义> 设 $y=\varphi(x)$ 在区间I上连续且有n阶导数，　一定交代在何段区间

若 $F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0$ $(\forall x\in I)$，　上成立，才为方程的解

则称 $y=\varphi(x)$ $(x\in I)$ 为方程(※)的解.

→ 若(※)式的解 $y=\varphi(x)$ 由方程 $\Phi(x,y)=0$ 所确定，则称 $\Phi(x,y)=0$ 为(※)式的隐式解.

<例> → $y=\dfrac{c}{x}+\dfrac{1}{5}x^4$ 是方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=x^3$ 的解，$I=(-\infty,0)$ 或 $(0,+\infty)$

→ $y=\tan(x-C)$ 是方程 $\dfrac{dy}{dx}=1+y^2$ 的解，$I=(C-\dfrac{\pi}{2},C+\dfrac{\pi}{2})$

解的区间端点可包含独立常数C

→ 微分方程的解的分类：

(1) 通解：若n阶微分方程的解 $y=\varphi(x;C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 中含n个相互独立的任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，即

<通积分>

$$J=\frac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial C_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n} \end{vmatrix}\neq 0 \quad ※$$

可定解并含有n个独立常数便为通解.

微分方程的通解中含有任意常数，且任意常数的个数与微分方程的阶相同，这些常数之间没有任何关系.

→ $y'=y$，通解 $y=Ce^x$

→ $y''+y=0$，通解 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$

→ 对其证明：$y'=C_1\cos x-C_2\sin x$，$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x$

→ 有 $y''+y=0$

对 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 分析 $\to J=\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ \cos x & -\sin x\end{vmatrix}=1\neq 0$

→ 可证. <反例: 对于 $y=C_1C_2\cos x$. 有 $J=0$. 则其非通解>.

(2) 特解: 不含有任意常数的解. <通解 $\xrightarrow{\text{任意常数确定}}$ 特解>

ps: 通解不一定包含方程的所有解.

<例> → $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ $\begin{cases} y=-\dfrac{1}{x+c} \text{ 为其通解.} \\ \text{但不包含特解: } y\equiv 0 \end{cases}$

即计算时 → $\dfrac{dy}{y^2}=dx \to -\dfrac{1}{y}=x+C$ (但此算法仅为 $y\neq 0$ 的情况)

※计算所有解时要考虑特解情况.

→

解的图象: 微分方程的积分曲线.

通解的图象: 积分曲线族.

初始条件: 在一点处给出确定任意常数的条件. <定点条件>

$\Rightarrow \begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ (一阶) / $\begin{cases} y''=f(x,y,y') \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0' \end{cases}$ (二阶)

→ 初值问题(柯西问题) → 物体运动的瞬时(局部)规律.

我们把求解$\boxed{\text{微分方程}}$的过程叫作积分一个微分方程;

微分方程的解叫作积分.

① n阶微分方程的解应包含n个任意常数.

② n阶微分方程初值条件一般提法:

$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$

→ n阶微分方程初值问值<一般形式>

$\begin{cases} y^{(n)}=F(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$

→ <了解> 只要F是连续的, 则初值问题的解是(局部)存在的。

→ <了解> 常见定解条件 $\begin{cases} \text{初值条件} \\ \text{边值条件.} \end{cases}$

→ 定分光谱: 相关函数族具有所需的各阶导数.

⟶ 微分方程的通解与初值问题的特解.

n阶 $\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0 \\ y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$

若微分方程 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)})=0$ 有通解：$y(x)=\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$

考虑初始条件，则需：

$$\begin{cases} y(x_0)=\varphi(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n)=y_0. \\ y'(x_0)=\varphi'(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n)=y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, \cdots, C_n)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

由于通解 φ 满足条件 $J=\dfrac{\partial(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1, C_2, \cdots, C_n)} \neq 0.$

$\xrightarrow{\text{隐函数存在定理}}$ 存在唯一一组 $C_1, \cdots, C_n$，使得初始条件满足

<详>. 由于隐函数存在定理，一般只能在局部范围内讨论通解.

→ 假设在点 $P: x=\xi, C_1=\alpha_1, \cdots, C_n=\alpha_n$ 的某个邻域 $N(P)$ 内考虑

$y=\varphi(x; C_1, C_2, \cdots, C_n)$. → 则在 $N(P)$ 内，我们有：

$$\begin{cases} y=\varphi(x; C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ y'=\varphi'(x; C_1, C_2, \cdots, C_n) \\ \cdots\cdots \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x; C_1, C_2, \cdots, C_n) \end{cases} \longrightarrow \text{令} \begin{cases} \eta=\varphi(\xi; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \\ \eta'=\varphi'(\xi; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \\ \cdots\cdots \\ \eta^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(\xi; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \end{cases}$$

因为在P点：$J=\dfrac{\partial(\varphi, \varphi', \cdots, \varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1, C_2, \cdots, C_n)} \neq 0$

→ 利用隐函数存在定理，我们可以在P点近旁得：

$$\begin{cases} C_1=C_1(x; y, y', \cdots, y^{(n-1)}), \\ C_2=C_2(x; y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \\ \cdots\cdots \\ C_n=C_n(x; y, y', \cdots, y^{(n-1)}). \end{cases} \to \text{且满足} \begin{cases} \alpha_1=C_1(\xi; \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}). \\ \alpha_2=C_2(\xi; \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}). \\ \cdots\cdots \\ \alpha_n=C_n(\xi; \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)}) \end{cases}$$

这样，对 $(\xi; \eta, \eta', \cdots, \eta^{(n-1)})$ 近旁的初值 $(x_0; y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$，可以确定常数：

$$\begin{cases} C_1^0=C_1(x_0; y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}). \\ C_2^0=C_2(x_0; y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}). \\ \cdots\cdots \\ C_n^0=C_n(x_0; y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}). \end{cases}$$

使得 $y=\varphi(x; C_1^0, C_2^0, \cdots, C_n^0)$ 是n阶初值问题的解.

→ 解函数族(对应)满足的微分方程.

① 知该函数族方程为 n 参数方程

② 求该方程 $n-1$ 阶导数

③ 判断 $J=\dfrac{\partial(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{\partial(C_1,C_2,\cdots,C_n)}\neq 0$，则所求方程为 n 阶微分方程.

④ 联立 $\begin{cases} y=\varphi(x;C_1,C_2,\cdots,C_n) \\ y'=\varphi'(x;C_1,C_2,\cdots,C_n) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x;C_1,C_2,\cdots,C_n) \end{cases}$ 由③可知方程可解 $\Rightarrow \begin{cases} C_1=\psi_1(x;y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \\ \vdots \\ C_n=\psi_n(x;y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \end{cases}$

⑤ 再求方程第 n 阶导数，代入④中推导出的 $C_1,C_2,\cdots,C_n$.

$\rightarrow y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x;\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n)$

⇒ 即得解.

§1.2 微分方程及其解的几何解释.

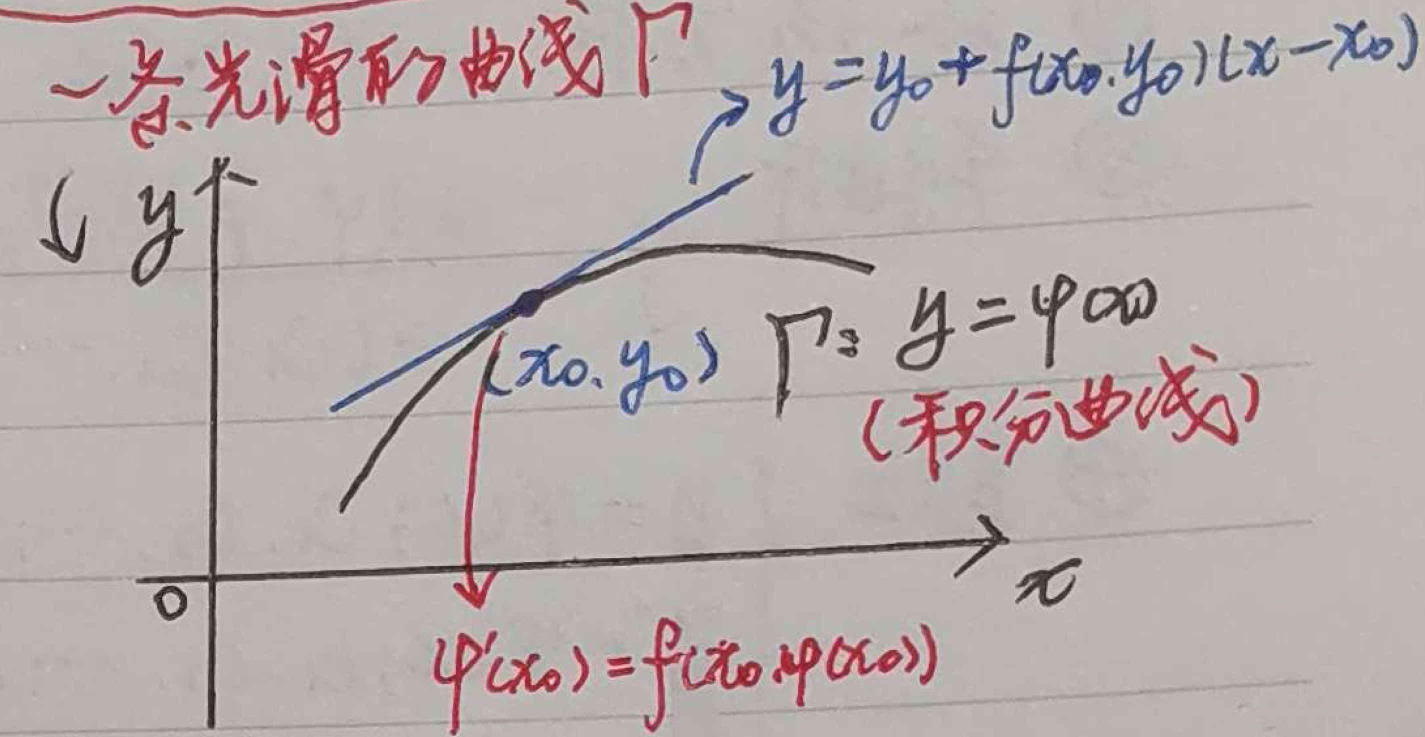
一、常微分方程解的几何解释.

若微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 有解 $y=\varphi(x)$, $(x\in I)$、(积分曲线)

→ 平面区域G内的连续函数

一条光滑的曲线Γ

→ 则有 $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}=f(x,\varphi(x))$.



二、线素场 (field of directions)

<定义> 在区域G内的每一个点P(x,y)处,
可以作一个以f(P)为斜率的(充分小的)直线段l(P).
以标明积分曲线(如果存在)在该点处的切线方向.
则称l(P)为微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 在P点的线素; → P上的一小段含斜率为f(x,y)的线段.
称区域G联同上述全体线素为微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的线素场或方向场.

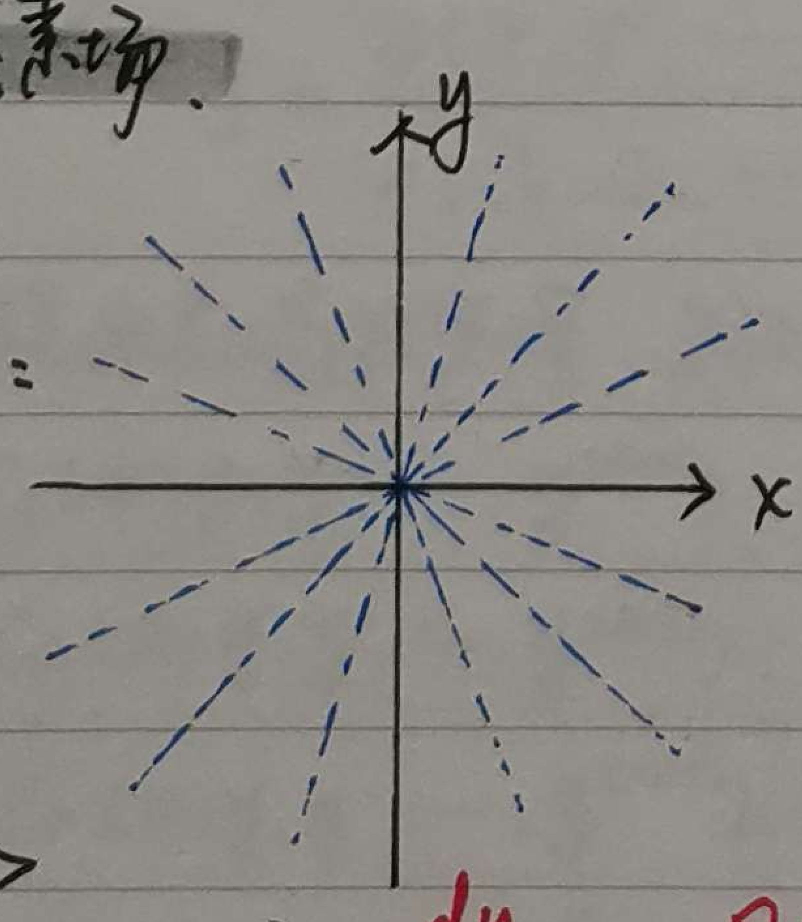
→ 微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的任意积分曲线Γ与它的线素场是吻合的 | 用于判断
< ∀P∈Γ, 线素场的线素l(P)与Γ在该点的切线是吻合的 >

→ 反之. 若在区域G内有一条光滑(连续可微)曲线 $\Lambda: y=\psi(x)$ $(x\in J)$:
它与微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的线素场吻合
⟺ Λ为微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的积分曲线.

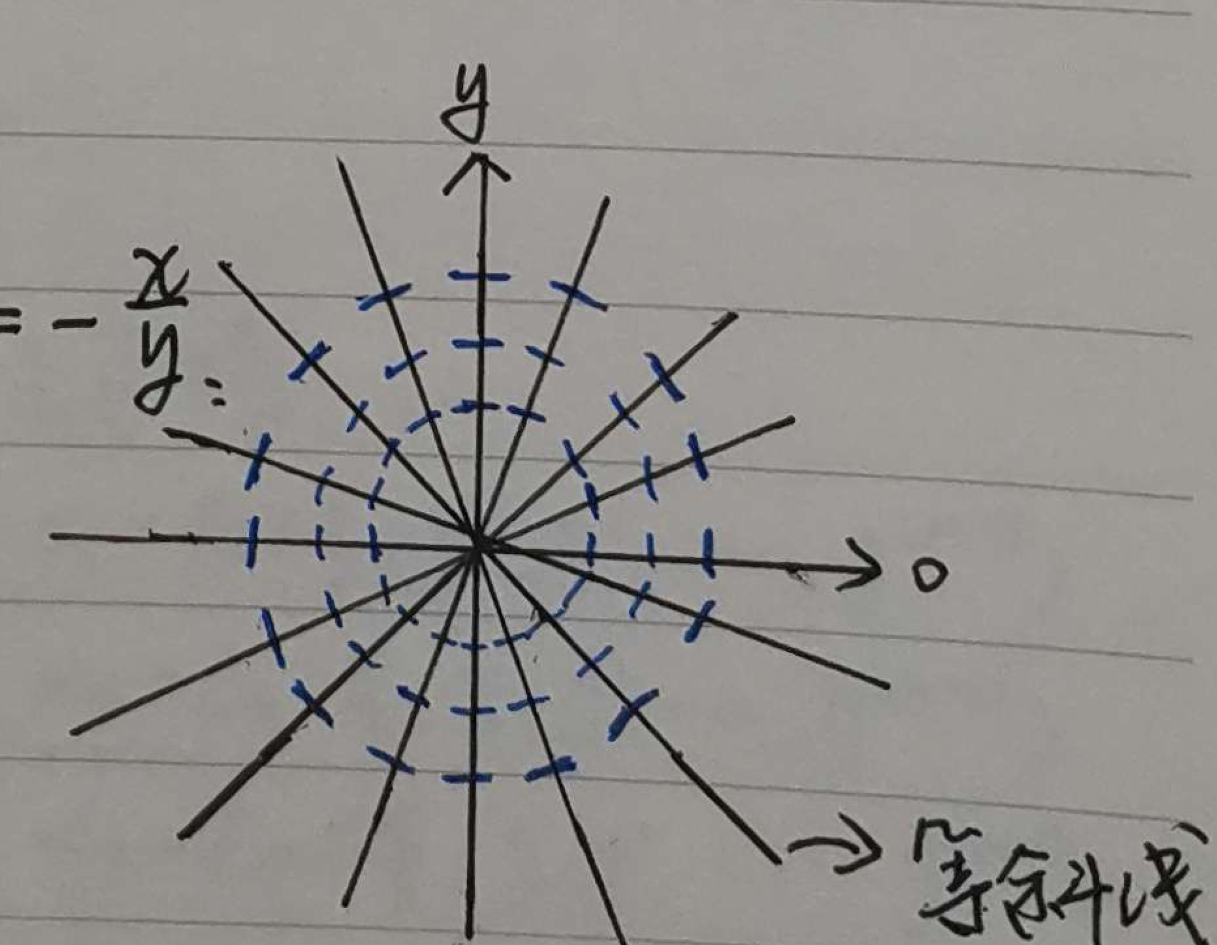
<定义> 构造线素场时, 通常利用由关系式 $f(x,y)=k$ 确定的曲线 L_k, 称其为线素场的等斜线(isocline)
<用于协助构造线素场> ↳ 线素场中, 方向相同的点的几何轨迹.

<例> 简单的线素场.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$.



$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.



<一阶微分方程>
→ 方程都能写成 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ 的形式

<定义> 那么在 $P=Q=0$ 的点处, 没有给出线素场方向. 这样的点为方程的奇异点
即 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$ 时, 线素场在 (x_0,y_0) 点没有意义.