第4章 不定积分

一、相关概念

设函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 在 I 上有定义，若 $F'(x)=f(x)$，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数。

F 的存在性：

① 若 f 连续，则 F 存在

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt+C$$

② 若 f 有第一类间断点，则 $F(x)$ 不存在。

$\left(F(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\end{cases}\right)$

例如：$f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ 无原函数。

③ F 有无穷个，且相差一个常数。

记为 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$

二、不定积分求法与常见不定积分

1. 第一换元法：若 f 有原函数 F，$u=\varphi(x)$ 可导，则

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx=F(\varphi(x))+C$$

2. 第二换元法：设 $x=\varphi(t)\in C^1$ 且 $\varphi'(t)\neq 0$。若 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 有原函数 $G(t)$，则

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

$$=G(\varphi^{-1}(x))+C$$

3. 三角代换

① $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad x=a\sin t$

② $\sqrt{a^2+x^2}$ $\quad x=a\tan t$

③ $\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad x=a\sec t$

4. 分部积分

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

例：$\int \sec x\,dx=\ln|\sec x+\tan x|+C$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\overset{x=\tan t}{=}\int\frac{\sec^2 t}{\sec t}\,dt$$

$$=\ln|\sec t+\tan t|+C$$

$$=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

三、有理函数的不定积分

求 $\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$

① 带余除法

$$P(x)=P_0(x)Q(x)+P_1(x)$$

$$\deg P_1(x)<\deg Q(x)$$

$$\Rightarrow\int P_0(x)\,dx+\int\frac{P_1(x)}{Q(x)}\,dx$$

② $Q(x)=(x-a)^\alpha\cdots(x-b)^\beta(x^2+px+q)^\lambda\cdots(x^2+rx+s)^\mu$

③ $$\frac{P_1(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots$$

④ 求 $\frac{A}{(x-a)^n}$　$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $(p^2-4q<0)$

$$\downarrow$$

$$\frac{Ax+B}{\left((x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right)^n}$$

第5章　定积分及其应用

一、定积分的定义

设f定义在$[a,b]$上，对于$[a,b]$的任意一个分割

$T:\ a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$

$\forall \xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

若 $\|T\|\to 0$ 时 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在

记 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$　$f\in R[a,b]$

不可积函数：$D(x)$

黎曼函数 $R(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{q}{p}\ (p,q\in N_+)\ \text{既约真分数}\\ 0 & x=0,1,\text{无理数.}\end{cases}$

$$\int_0^1 R(x)dx=0$$

二、性质

1. 基本性质. 线性性. 保号性. 单调性. 有界性

Proof: 如果无界

$\forall T$. f于Δ_k无界

取ξ_i $i\neq k$.

$G=\left|\sum_{i\neq k} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$

取 ξ_k, $|f(\xi_k)|>\frac{I+G}{\Delta x_k}$

$\left|\sum f(\xi_i)\Delta x_i\right|\geq |f(\xi_k)\Delta x_k|-G>I$

2、不等式：

① Cauchy - Schwarz 不等式

$f,g\in C[a,b]$

$$\left(\int_a^b f\cdot g\,dx\right)^2\leq \int_a^b f^2dx\int_a^b g^2dx$$

Proof: 考虑

$$\int_a^b (f-\lambda g)^2dx\geq 0$$

② Hölder 不等式

设 $\|f\|_p=\left(\int_a^b|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}$

$p,q>1$　$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$\|f\cdot g\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$

$$\int_a^b|f\cdot g|dx\leq\left(\int_a^b|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b|g|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$p=2$ Cauchy

③ Minkowski 不等式

$p\geq 1$

$\|f+g\|_p\leq\|f\|_p+\|g\|_p$

$$\left(\int_a^b|f+g|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_a^b|f|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b|g|^qdx\right)^{\frac{1}{q}}$$

3、积分中值定理.

Thm: 设 $f,g\in C[a,b]$，且g在$[a,b]$上不变号. 则

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Cor: $f\in C[a,b]$. $\exists\xi\in[a,b]$ s.t.

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$　$\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$

4. Newton - Leibniz 公式

若f在$[a,b]$上可积，且f有一个原函数为F. 则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

5、变限积分

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$　$(a\leq x\leq b)$

① f可积 $\Rightarrow$ Φ连续

② f连续 $\Rightarrow$ Φ可导

变限积分求导.

$$\left(\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt\right)' = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$$

$$\left(\int_{a}^{u(x)} f(t)\,dt\right)' = f(u(x))u'(x)$$

Proof: $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\int_a^{u(x)} f(t)\,dt - \int_a^{u(x_0)} f(t)\,dt}{x-x_0}$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\int_{u(x_0)}^{u(x)} f(t)\,dt}{x-x_0}$

$= \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(\xi)(u(x)-u(x_0))}{x-x_0}$

$u(x_0) \le \xi \le u(x)$

$= f(u(x_0))\,u'(x_0)$

三、计算方法

1. Thm: 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上连续可导, 且 $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, $\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$, 或 $\varphi([\beta,\alpha])=[a,b]$
则
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

2、若 $u,v \in C^1[a,b]$, 则
$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

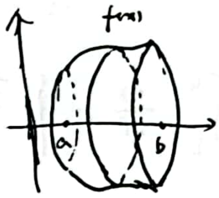
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{为偶} \\ \frac{n-1}{n} \cdots \frac{2}{3} & n\text{为奇} \end{cases}$$

四、几何应用

面积: ① 直角坐标系 $\boxed{ds}$

② 极坐标系

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\varphi^2(\theta)\,d\theta$$



体积: ① 旋转体 $\boxed{dV}$

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

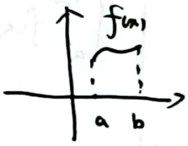
② 已知截面面积

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

弧长: $\boxed{ds}$

① 直角坐标系

$$s = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)}\,dx$$

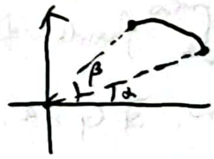


② 极坐标系 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$

$\rho=\rho(\theta)$, $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

$= \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

$$s = \int_\alpha^\beta ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,d\theta$$



第七章 反常积分

一、反常积分

1. 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续(分段)，且在任意 $[a,u]$ 上可积，如果极限

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx = J.$$

则称 J 为 f 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分

记为 $J=\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$

ex：讨论 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 敛散性

$$\int_1^u \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(u^{1-p}-1) & p\neq 1 \xrightarrow{u\to\infty} \begin{cases}\frac{1}{p-1} & p>1 \\ +\infty & p<1\end{cases} \\ \ln u & p=1 \ \xrightarrow{u\to\infty} +\infty \end{cases}$$

2. 性质.

若 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛

$$f(x)\le |f(x)|$$
$$-f(x)\le |f(x)|$$

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\right| \le \int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx < +\infty$$

3. 判别法

① (Cauchy 收敛准则)

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon>0$，$\exists G\ge a$. s.t. $\forall u_1,u_2>G$

都有 $\left|\int_a^{u_2} f(x)dx - \int_a^{u_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{u_1}^{u_2} f(x)dx\right| < \varepsilon$

② 非负函数

比较判别法

$f,g\ge 0$，在 $[a,u]$ 上可积，且

$f(x)\le g(x)$ $\forall x\in[a,+\infty)$

则当 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 发散

极限形式

$f\ge 0$，$g>0$，$[a,u]$ 可积

且 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = c$

(i) $0<c<+\infty$ $\int_a^{+\infty} f\,dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g\,dx$ 同敛态

(ii) $c=0$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛

(iii) $c=+\infty$ $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 发散 则 $\int_a^{+\infty} f(x)$ 发散

Cauchy 判别法

(1) $0\le f(x)\le \frac{1}{x^p}$，$p>1$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛

(2) $f(x)\ge\frac{1}{x^p}$，$p\le 1$ 则 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散

极限形式

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = \lambda.$$

(i) 当 $p>1$，$0\le\lambda<+\infty$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛

(ii) 当 $p\le 1$，$0<\lambda\le+\infty$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 发散

③ 一般情形

(i) Dirichlet 判别法

若 $F(u)=\int_a^u f(x)dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调趋于 0，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛

(ii) Abel 判别法

若 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，$g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ 收敛.

ex: $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ $(p>0)$ 收敛性